

16.10.

Minule: počítáme $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
podle polohy bodu x_0 vůči D_f .

3 možnosti:

3) : $x_0 \notin D_f$ ani krajním bod D_f
- pak $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ nemá smysl

1) $x_0 \in D_f$, f spojitá $\Rightarrow$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

2) $x_0 \notin D_f$, ale je krajním bodem D_f

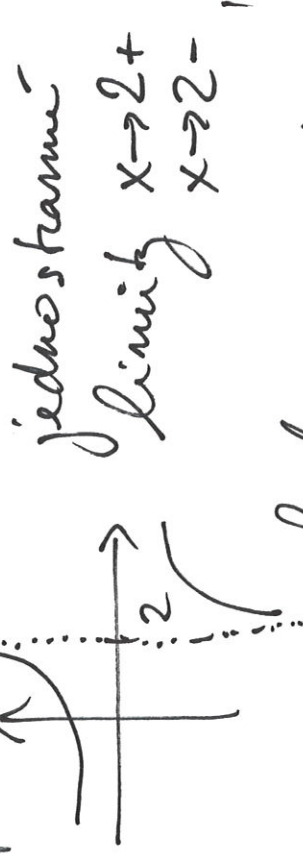
2a) $x_0 = \pm\infty \dots$ počítáme
jáho limity posloupností,
pozor na znaménka

Dnes 2b) $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\underline{Pr}: \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-2}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$$

"Doplňme $x=2$ " : $\frac{3}{0}$ nejde

Ale víme, že to je lineární
lomenná fce, jejím grafem je
hyperbola: určitě budou existovat



jednostranné
limity $x \rightarrow 2^+$
 $x \rightarrow 2^-$

budou rovný $+\infty, -\infty$,
ale které? bude která?

Používané tzv. Dělení

Kladnou/zápornou nulu

Uvažujeme $\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{p(x)}{q(x)}$, přičemž

$$a) \lim_{x \rightarrow x_0+} p(x) = p(x_0) \neq 0$$

(p je v bodě x_0 spojitá)

$$b) \lim_{x \rightarrow x_0+} q(x) = 0$$

$$c) q(x) > 0 \text{ pro } x > x_0$$

[b) + c) znamená, že $q(x)$]
jde k 0 zprava pro $x \rightarrow x_0+$

Pak platí: "kladná nula"

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{0+} = \underline{\underline{p(x_0) \cdot (+\infty) = +\infty}}$$

Podobně, je-li v bodě c):

$$q(x) < 0 \text{ pro } x > x_0 \Rightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{0-} = \underline{\underline{p(x_0) \cdot (-\infty) = -\infty}}$$

→ "záporná nula" = $\underline{\underline{-\infty}}$

Analogicky uče platí i pro

$x \rightarrow x_0-$; zleva jsme namířili

fce $q(x)$ pro $x < x_0$.

$$\underline{\underline{Př:}} \quad f(x) = \frac{x+1}{x+3}, \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

Počítáme teď jen

$$\lim_{x \rightarrow -3+} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow -3-} f(x)$$

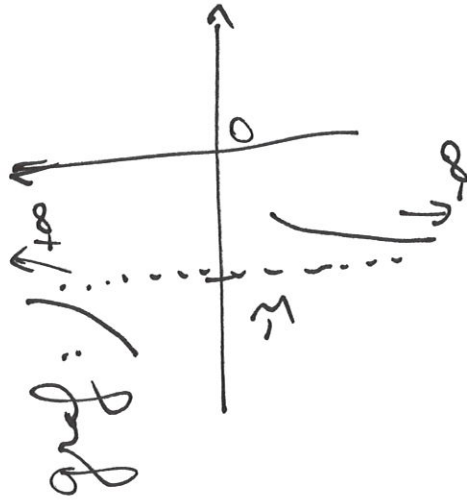
$$= \underline{\underline{+\infty}}$$

Vidíme: $p(x) = x+1$
 $p(-3) = -2 \neq 0$ ✓

Přijme

$$\lim_{x \rightarrow -3+} \frac{x+1}{x+3} = \frac{-2}{0+} = (-2) \cdot (+\infty) = \underline{\underline{-\infty}}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3-} \frac{x+1}{x+3} = \frac{-2}{0-} = (-2) \cdot (-\infty) = \underline{\underline{+\infty}}$$



Pr: $f(x) = \frac{x+4}{x^2-3x+2}$

$$D_f = ? \quad x^2 - 3x + 2 = (x-1) \cdot (x-2)$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} = (-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$$

$\Rightarrow$ zjimejme limity

$$N: -\infty, 1-, 1+, 2-, 2+, +\infty$$

Pročijme $\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x+4}{x^2-3x+2} = \frac{6}{4-6+2} = \frac{6}{0} \rightarrow$

Je todo $0+$ nebo $0-?$
 Nebo určit.

Správný postup: jmenovatel rozložíme na
 číselné činitele a dosadíme do nich:

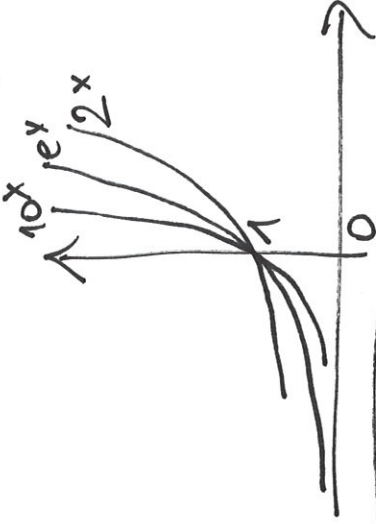
$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x+4}{(x-1)(x-2)} \stackrel{\text{dosad } x=2+}{=} \frac{6}{1 \cdot 0+} = \underline{\underline{+\infty}}$$

Limity exp a log

exponenciála a^x , $a > 0$
 $a \neq 1$

$$D_f = \mathbb{R}$$

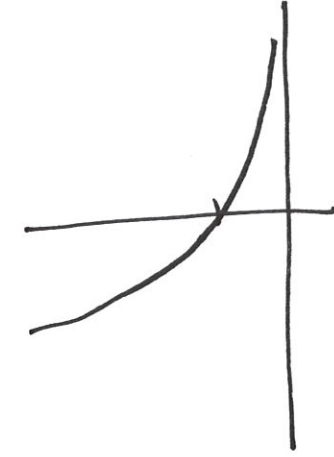
[případ $a > 1$]
(vč. $a = e$)



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$$

[případ $a \in (0, 1)$]



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$$

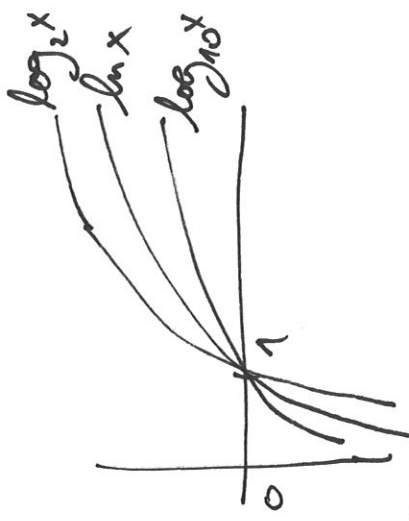
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$$

logaritmus

$\log_a x$, $a > 0$
 $a \neq 1$

$$D_f = \mathbb{R}_+$$

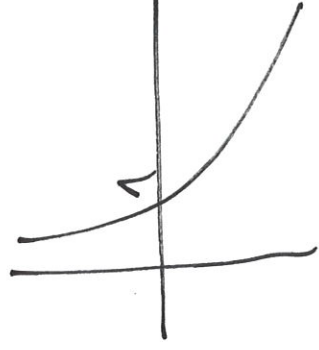
[případ $a > 1$]
(vč. $a = e$, tj. $\ln x$)



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$

[případ $a \in (0, 1)$]



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$

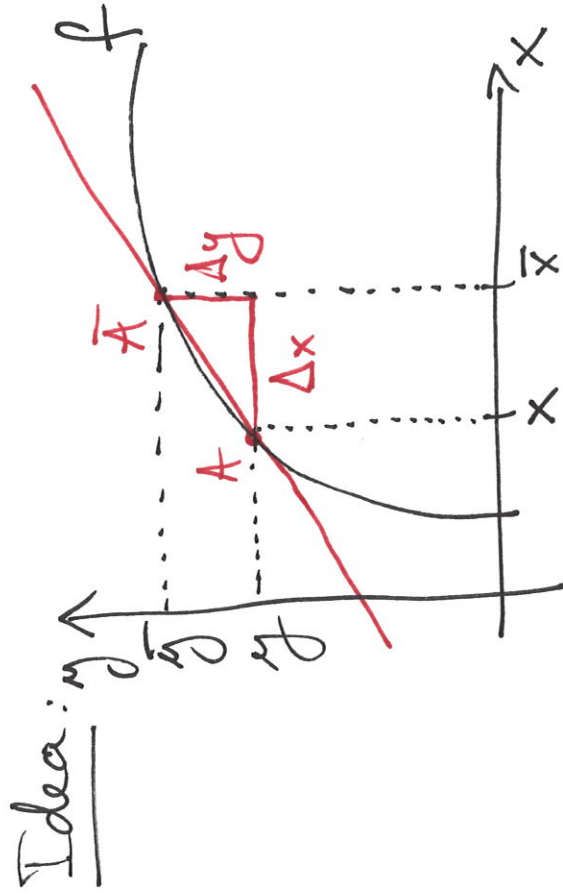
Derivace funkce

označení: $f(x)$... funkce
 $f'(x)$... její derivace

nebo: $y = f(x)$

$$\text{pak } f'(x) = \frac{dy}{dx}$$

(to není zlomek, čteme to
"dy podle dx")



Dále označíme 2 body v rovině
(na grafu fce f): $A = [x, y]$, $\bar{A} = [\bar{x}, \bar{y}]$.

Těmito dvěma body proložíme
přímku AA . Její směrnice je

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\bar{y} - y}{\bar{x} - x}$$

Úvaha: začneme bod $\bar{x}$ přibližovat
k pevnému bodu x . Tedy
bod A přistává pevný

$$y = f(x), \bar{y} = f(\bar{x})$$

$$\Delta x = \bar{x} - x$$

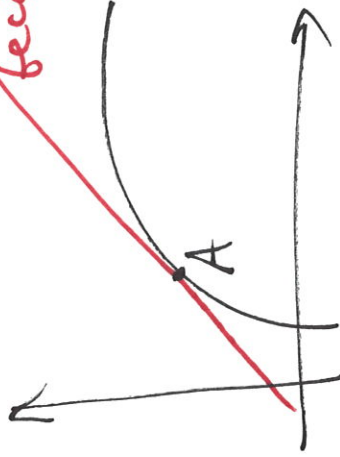
$$\Delta y = \bar{y} - y$$

a bod $\bar{A}$ se k němu
blíží. Přímka AA
tedy mění svoji
směrnici.

Pro limitní případ $\bar{A} = A$ se
z přímkou $A\bar{A}$ stává tečna
ke grafu f ce f .

Def: tečna ke grafu fce f
v bodě A je přímka, která
se v bodě A grafu dotýká.

tečna



Směrnice této tečny: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{0}$?

Bude to limita směrnice přímk

$A\bar{A}$ pro $\bar{x} \rightarrow x$.

Def: derivace fce f v bodě x
(pro pevné x) je číslo

$$f'(x) = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Tj. derivace $f'(x)$ je rovnice
směrnici tečny ke grafu f v bodě A .

Def: Tedy pro pevné $x \in \mathbb{R}$ je
 $f'(x)$ reálné číslo. Totéž

uděláme pro $\forall x \in D_f$
a dostaneme tak funkci $f'(x)$,
přičemž derivace fce f .

Pozn: $\frac{dy}{dx} = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} \frac{\Delta y}{\Delta x}$

↑
 první zlomek, zlomek
 jen ustálený symbol

Pr: lineární fce $f(x) = ax + b$

spočteme její derivaci přímo

z definice: předp. $x \in \mathbb{R}$ pevně,

$$y = f(x) = ax + b$$

$$\bar{y} = f(\bar{x}) = a\bar{x} + b, \quad \bar{x} \text{ proměnné}$$

$$f'(x) = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} \frac{y - \bar{y}}{\bar{x} - x} = \lim_{\bar{x} \rightarrow x} \frac{(ax + b) - (a\bar{x} + b)}{\bar{x} - x} =$$

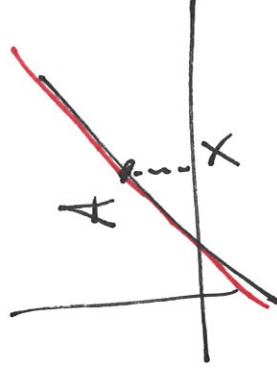
$$= \lim_{\bar{x} \rightarrow x} \frac{a(\bar{x} - x)}{(\bar{x} - x)} = \underline{\underline{a}}$$

Tedy derivace fce $ax + b$ v libov. bodě x
 je rovná číslu a .

Takže směrnice tečny k lin. fci
 je vždy rovna a .

Ovšem směrnice přímký $y = ax + b$
 je také a .

$\Rightarrow$ lin. fce splývá se svojí
 tečnou (v $\forall$ bodě).



Spec. pro konstantní fci: $y = b$
 $(f(x) = b) \dots \underline{\underline{f'(x) = 0}}$

Derivace konstanty je nula!